

## 問題の解釈

「4人のとき  $(1 - 2) - (3 - 4)$  とつなぐ場合は1つと数える」という補足から、  
「このような最終形が何通りあるか」という問題だと解釈する。

### 問1

以下の5通り。

$$((1 - 2) - 3) - 4$$

$$(1 - (2 - 3)) - 4$$

$$1 - ((2 - 3) - 4)$$

$$1 - (2 - (3 - 4))$$

$$(1 - 2) - (3 - 4)$$

### 問2

以下の14通り。

$$(((1 - 2) - 3) - 4) - 5$$

$$((1 - (2 - 3)) - 4) - 5$$

$$(1 - ((2 - 3) - 4)) - 5$$

$$1 - (((2 - 3) - 4) - 5)$$

$$(1 - (2 - (3 - 4))) - 5$$

$$1 - (2 - (3 - 4)) - 5$$

$$1 - (2 - ((3 - 4) - 5))$$

$$((1 - 2) - (3 - 4)) - 5$$

$$(1 - 2) - ((3 - 4) - 5)$$

$$((1 - 2) - 3) - (4 - 5)$$

$$(1 - 2) - (3 - (4 - 5))$$

$$(1 - (2 - 3)) - (4 - 5)$$

$$1 - ((2 - 3) - (4 - 5))$$

$$1 - (2 - (3 - (4 - 5)))$$

### 問 3

$(1-2)-(3-4)$  のような手の繋ぎ方の組み合わせを数式に見立てる。  
(以降、演算子は+に置き換える)

このままの形では難しそうなので、中置記法ではなく後置記法で書き直してみる。  
このとき、数字は小さい順に並べることにすれば、後置記法の数式は一意に決まる。  
 $n=4$  の場合を書き出すと

$$\begin{aligned} &((1-2)-3)-4 && 12+3+4+ \\ &(1-(2-3))-4 && 123++4+ \\ &1-((2-3)-4) && 123+4++ \\ &1-(2-(3-4)) && 1234+++ \\ &(1-2)-(3-4) && 12+34++ \end{aligned}$$

となる。

後置記法の計算方法は、先頭から順に見ていき演算子が出てきたら、  
その演算子と直前の2つの数字を計算結果に置き換えるという手順を繰り返す。

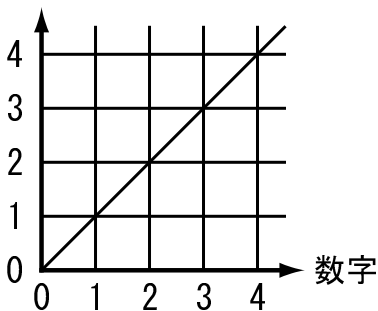
(例  $123+4++$   $154++$   $19+$   $10$ )

このことから、後置記法の記述が計算可能であるためには、  
先頭から数字の個数と演算子の個数を数えていったとき、常に  
「それまでに現れた数字の個数 > それまでに現れた演算子の個数」  
という条件が成り立っていなければならないことがわかる。

今、演算子の総数より数字の総数の方が1個だけ多いが、  
総数が同じ方が以降の話が少しだけ簡単になるので、  
最初の数字は固定してその数字は数えないことにすれば、満たさなければならない条件は  
「それまでに現れた数字の個数  $\geq$  それまでに現れた演算子の個数」  
と書き直せる。

次の図において、後置記法の式を先頭から順に見ていったとき、  
数字が現れたら X 方向へ +1 進み、演算子が現れたら Y 方向へ +1 進むとすると、  
原点  $(0,0)$  から点  $(n-1, n-1)$  へ行く最短経路の内、  
 $y \leq x$  を常に満たす経路の総数が求める答ということになる。

#### 演算子



ここで、原点から  $0 \leq y \leq x$  を満たす点  $(x, y)$  まで行く最短経路の総数を  $F(x, y)$  とする。

(つまり  $n$  人の手の繋ぎ方は  $F(n-1, n-1)$  である)

$F(x, y)$  は以下の[ 1 I 2 I 3 ]の漸化式で表される。

[ 1 ]

$y = 0$  の場合は  $0 \leq x$  の任意の  $x$  に対して、

$$F(x, 0) = 1$$

[ 2 ]

$1 \leq y = x$  の任意の  $x, y$  に対して、

$$F(x, y) = F(x, y-1)$$

[ 3 ]

$1 \leq y < x$  の任意の  $x, y$  に対して、

$$F(x, y) = F(x-1, y) + F(x, y-1)$$

[ 2 I 3 ]より、

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{i=y}^x F(i, y-1) \\ &= \sum_{i=1}^{x-y+1} F(i+y-1, y-1) \end{aligned}$$

が得られるので、これを利用して  $F(x, 3)$  までの一般項を求めると、

$$F(x, 0) = 1$$

$$F(x, 1) = \sum_{i=1}^x F(i, 0) = \sum_{i=1}^x 1 = x$$

$$F(x, 2) = \sum_{i=1}^{x-1} F(i+1, 1) = \sum_{i=1}^{x-1} (i+1) = \frac{(x-1)(x+2)}{2}$$

$$F(x, 3) = \sum_{i=1}^{x-2} F(i+2, 2) = \sum_{i=1}^{x-2} \frac{(i+1)(i+4)}{2} = \frac{(x-2)(x+2)(x+3)}{6}$$

これから、

$$F(x, 4) = \frac{(x-3)(x+2)(x+3)(x+4)}{4!}$$

$$F(x, 5) = \frac{(x-4)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{5!}$$

一般に

$$F(x, y) = \frac{(x-y+1)(x+y)!}{y!(x+1)!}$$

(1)

が予想される。

(1)式が漸化式[1][2][3]を満たすことを証明する.

[1]

$y = 0$  の場合は  $0 \leq x$  の任意の  $x$  に対して,

$$F(x, 0) = \frac{(x+1)x!}{0!(x+1)!} = 1$$

[2]

$1 \leq y = x$  の任意の  $x, y$  に対して,

$$F(x, y) = F(x, x) = \frac{(2x)!}{x!(x+1)!}$$

$$\begin{aligned} F(x, y-1) &= F(x, x-1) = \frac{2(2x-1)!}{(x-1)!(x+1)!} \\ &= \frac{2x(2x-1)!}{x!(x+1)!} \\ &= \frac{(2x)!}{x!(x+1)!} \\ &= F(x, x) = F(x, y) \end{aligned}$$

[3]

$1 \leq y < x$  の任意の  $x, y$  に対して,

$$F(x, y) = \frac{(x-y+1)(x+y)!}{y!(x+1)!}$$

$$\begin{aligned} F(x-1, y) + F(x, y-1) &= \frac{(x-y)(x+y-1)!}{y!x!} + \frac{(x-y+2)(x+y-1)!}{(y-1)!(x+1)!} \\ &= \frac{\{(x+1)(x-y) + y(x-y+2)\}(x+y-1)!}{y!(x+1)!} \\ &= \frac{\{(x-y)x + x - y + (x-y)y + 2y\}(x+y-1)!}{y!(x+1)!} \\ &= \frac{\{(x-y)(x+y) + x+y\}(x+y-1)!}{y!(x+1)!} \\ &= \frac{(x-y+1)(x+y)(x+y-1)!}{y!(x+1)!} \\ &= \frac{(x-y+1)(x+y)!}{y!(x+1)!} \\ &= F(x, y) \end{aligned}$$

以上より(1)式が正しいことが証明された.

ここで,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{(x-y+1)(x+y)!}{y!(x+1)!} \\ &= \frac{(x-y+1)(x+y)!}{y!x!(x+1)} \\ &= \frac{(x-y+1)_{x+y}C_y}{x+1} \quad (\text{Cは組み合わせ}) \end{aligned}$$

と変形できる.

ゆえに,  $n$  人の手の繋ぎ方は

$$F(n-1, n-1) = \frac{2^{n-2}C_{n-1}}{n}$$