問 1〜3 の (1) を拡張して, 一般に n チームの場合を考える.

■ 1 チームの勝ち点の取り方は何点から何点まであるか.
解）
n チームのリーグ戦では 1 チームの試合は $n-1$ 試合ある.
引き分けが 0 回なら可能な勝ち点の合計は $3n'$ 点 $(0 \leqq n' \leqq n-1)$.
引き分けが 1 回なら可能な勝ち点の合計は $3n'+1$ 点 $(0 \leqq n' \leqq n-2)$.
引き分けが 2 回なら可能な勝ち点の合計は $3n'+2$ 点 $(0 \leqq n' \leqq n-3)$.
引き分けが 3 回以上の場合は, 引き分け 3 回を勝ち 1 回と負け 2 回に置き換えていけば, 引き分けが 0〜2 回の場合に帰着する.
ゆえに, 可能な勝ち点の取り方は 0 点〜$3n-3$ 点の内, $3n-4$ 点を除いたすべて.

■それぞれの勝ち点合計は何通りの試合結果から生まれるか.
解）
n チームのリーグ戦で 1 チームの勝ち点合計が m 点になる組み合わせの総数を $F(n,m)$ とする.
$n-1$ 試合の勝ち点合計が m 点になるのは,
・$n-2$ 試合の勝ち点合計が $m-3$ 点で $n-1$ 試合目で勝つ場合
・$n-2$ 試合の勝ち点合計が $m-1$ 点で $n-1$ 試合目で引き分ける場合
・$n-2$ 試合の勝ち点合計が m 点で $n-1$ 試合目で負ける場合
の 3 通りであるから,

$$F(n,m) = F(n-1,m-3) + F(n-1,m-1) + F(n-1,m) \tag{1}$$

という漸化式を得る.
ここで, $n=1$ のときは試合ができないため, 勝ち点合計は 0 とする. すなわち,

$$F(1,0) = 1 \tag{2}$$

$$m > 0 \text{ のとき } F(1,m) = 0 \tag{3}$$

また, 負の勝ち点合計はあり得ないので,

$$m < 0 \text{ のとき } F(n,m) = 0 \tag{4}$$

とする.
漸化式を用いて $n > 2$, $m \geqq 0$ について計算すると以下のようになる.

m＼n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36
3	0	1	2	4	8	15	26	42	64	93
4	0	0	2	6	13	25	45	77	126	198
5	0	0	0	3	12	31	66	126	224	378
6	0	0	1	3	10	30	76	168	336	624
7	0	0	0	3	12	35	90	211	456	918
8	0	0	0	0	6	30	96	252	589	1269
9	0	0	0	1	4	20	80	252	672	1597
10	0	0	0	0	4	20	75	245	708	1836
11	0	0	0	0	0	10	60	231	728	2025

この結果から $F(n,m)$ の一般項を予想する.
まず m を固定して考える.

$$F(n,0) = 1$$
$$F(n,1) = n-1$$

は自明. $m=2$ の場合は階差を取ると $F(n+1,2)-F(n,2)=n-1$ となっており,

$$F(n,2) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$m=3$ の場合は階差を取ると $F(n+1,3)-F(n,3)=F(n,2)+1$ となっており, 計算して整理すると,

$$F(n,3) = \frac{1}{6}(n-1)(n^2-5n+12)$$

さらに $m=4$ で階差数列を 3 階まで調べると n の 1 次式になるので, $F(n,4)$ は n の 4 次式であることがわかる.
以上より $F(n,m)$ は n の m 次式で, n^m の係数が $\dfrac{1}{n!}$ になっていることが予想できる.
また, $F(n_0,m)=0$ なら $F(n_0,m)$ は $n-n_0$ を因数に持つので, これを利用して $m=8$ までの一般項を計算する.
例えば $m=6$ の場合,

$$F(n,6) = \frac{1}{6!}(n-1)(n-2)(n^4+an^3+bn^2+cn+d)$$

とおき, $n=3,4,5,6$ を代入すると 4 元連立 1 次方程式が得られ, これを解いて

$$a = -18$$
$$b = 239$$
$$c = -1182$$
$$d = 2160$$

を得る.

同様にして計算した結果を以下に示す.

$$
\begin{aligned}
F(n,0) &= \frac{1}{0!} \\
F(n,1) &= \frac{1}{1!}(n-1) \\
F(n,2) &= \frac{1}{2!}(n-1)(n-2) \\
F(n,3) &= \frac{1}{3!}(n-1)(n^2-5n+12) \\
F(n,4) &= \frac{1}{4!}(n-1)(n-2)(n^2-7n+36) \\
F(n,5) &= \frac{1}{5!}(n-1)(n-2)(n-3)(n^2-9n+80) \\
F(n,6) &= \frac{1}{6!}(n-1)(n-2)(n^4-18n^3+239n^2-1182n+2160) \\
F(n,7) &= \frac{1}{7!}(n-1)(n-2)(n-3)(n^4-22n^3+389n^2-2528n+7560) \\
F(n,8) &= \frac{1}{8!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n^4-26n^3+587n^2-4762n+21840)
\end{aligned}
$$

これらの式を元に任意の m に対する $F(n,m)$ の一般項を予想する.
$m \geqq 3$ の因数に 2 次以上の式が含まれており, このままだと規則性が見えないので式を変形する.
2 次以上の因数を書き出すと,

$$
\begin{aligned}
m=3 &: n^2-5n+12 \\
m=4 &: n^2-7n+36 \\
m=5 &: n^2-9n+80 \\
m=6 &: n^4-18n^3+239n^2-1182n+2160 \\
m=7 &: n^4-22n^3+389n^2-2528n+7560 \\
m=8 &: n^4-26n^3+587n^2-4762n+21840
\end{aligned}
$$

2 次式の n の係数と, 4 次式の n^3 の係数に注目して以下のように変形する.

$$
\begin{aligned}
m=3 &: (n-2)(n-3)+6 \\
m=4 &: (n-3)(n-4)+24 \\
m=5 &: (n-4)(n-5)+60 \\
m=6 &: (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)+120(n^2-7+15) \\
m=7 &: (n-4)(n-5)(n-6)(n-7)+210(n^2-9+32) \\
m=8 &: (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)+336(n^2-11+60)
\end{aligned}
$$

$6 \leqq m \leqq 8$ の 2 次式を同様に変形する.

$$
\begin{aligned}
m=6 &: (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)+120\,((n-3)(n-4)+3) \\
m=7 &: (n-4)(n-5)(n-6)(n-7)+210\,((n-4)(n-5)+12) \\
m=8 &: (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)+336\,((n-5)(n-6)+30)
\end{aligned}
$$

係数および定数部分を因数分解して規則性を調べると，

$$
\begin{aligned}
&m=3:(n-2)(n-3)+1\cdot2\cdot3\\
&m=4:(n-3)(n-4)+2\cdot3\cdot4\\
&m=5:(n-4)(n-5)+3\cdot4\cdot5\\
&m=6:(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)+4\cdot5\cdot6\left((n-3)(n-4)+\frac{1\cdot2\cdot3}{2}\right)\\
&m=7:(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)+5\cdot6\cdot7\left((n-4)(n-5)+\frac{2\cdot3\cdot4}{2}\right)\\
&m=8:(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)+6\cdot7\cdot8\left((n-5)(n-6)+\frac{3\cdot4\cdot5}{2}\right)
\end{aligned}
$$

これだけだと $6\leqq m\leqq 8$ の定数項が $\dfrac{1}{2}$ 倍されているのか $\dfrac{1}{2!}$ 倍されているのかがわからない．
そこで $m=9$ の場合を調べる．$m=8$ までの結果より，

$$
\begin{aligned}
F(n,9)=\frac{1}{9!}(n-1)(n-2)(n-3)\Bigg(&(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)\\
&+7\cdot8\cdot9\Bigg((n-4)(n-5)(n-6)(n-7)+\frac{4\cdot5\cdot6}{2}\left((n-4)(n-5)+\frac{1\cdot2\cdot3}{x}\right)\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

が予想される．$n=4$ を代入して x を求めると $x=3$ となる．以上より，

$$
\begin{aligned}
F(n,0)&=\frac{1}{0!}\\
F(n,1)&=\frac{1}{1!}(n-1)\\
F(n,2)&=\frac{1}{2!}(n-1)(n-2)\\
F(n,3)&=\frac{1}{3!}(n-1)\left((n-2)(n-3)+\frac{1\cdot2\cdot3}{1}\right)\\
F(n,4)&=\frac{1}{4!}(n-1)(n-2)\left((n-3)(n-4)+\frac{2\cdot3\cdot4}{1}\right)\\
F(n,5)&=\frac{1}{5!}(n-1)(n-2)(n-3)\left((n-4)(n-5)+\frac{3\cdot4\cdot5}{1}\right)\\
F(n,6)&=\frac{1}{6!}(n-1)(n-2)\left((n-3)(n-4)(n-5)(n-6)+\frac{4\cdot5\cdot6}{1}\left((n-3)(n-4)+\frac{1\cdot2\cdot3}{2}\right)\right)\\
F(n,7)&=\frac{1}{7!}(n-1)(n-2)(n-3)\left((n-4)(n-5)(n-6)(n-7)+\frac{5\cdot6\cdot7}{1}\left((n-4)(n-5)+\frac{2\cdot3\cdot4}{2}\right)\right)\\
F(n,8)&=\frac{1}{8!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\Bigg((n-5)(n-6)(n-7)(n-8)\\
&\qquad+\frac{6\cdot7\cdot8}{1}\left((n-5)(n-6)+\frac{3\cdot4\cdot5}{2}\right)\Bigg)\\
F(n,9)&=\frac{1}{9!}(n-1)(n-2)(n-3)\Bigg((n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)\\
&\qquad+\frac{7\cdot8\cdot9}{1}\Bigg((n-4)(n-5)(n-6)(n-7)+\frac{4\cdot5\cdot6}{2}\left((n-4)(n-5)+\frac{1\cdot2\cdot3}{3}\right)\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

整理すると,

$$
\begin{aligned}
F(n,0) &= \frac{1}{0!0!} \\
F(n,1) &= \frac{1}{1!0!}(n-1) \\
F(n,2) &= \frac{1}{2!0!}(n-1)(n-2) \\
F(n,3) &= \frac{1}{3!0!}(n-1)(n-2)(n-3) \\
&+ \frac{1}{0!1!}(n-1) \\
F(n,4) &= \frac{1}{4!0!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \\
&+ \frac{1}{1!1!}(n-1)(n-2) \\
F(n,5) &= \frac{1}{5!0!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \\
&+ \frac{1}{2!1!}(n-1)(n-2)(n-3) \\
F(n,6) &= \frac{1}{6!0!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \\
&+ \frac{1}{3!1!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \\
&+ \frac{1}{0!2!}(n-1)(n-2) \\
F(n,7) &= \frac{1}{7!0!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) \\
&+ \frac{1}{4!1!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \\
&+ \frac{1}{1!2!}(n-1)(n-2)(n-3) \\
F(n,8) &= \frac{1}{8!0!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) \\
&+ \frac{1}{5!1!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \\
&+ \frac{1}{2!2!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \\
F(n,9) &= \frac{1}{9!0!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9) \\
&+ \frac{1}{6!1!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) \\
&+ \frac{1}{3!2!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \\
&+ \frac{1}{0!3!}(n-1)(n-2)(n-3)
\end{aligned}
$$

2 項係数 $\displaystyle\binom{n}{r} = \frac{1}{r!}\prod_{i=0}^{r-1}(n-i)$ を使うと以下のように書ける.

$$
\begin{aligned}
F(n,0) &= \binom{n-1}{0}\binom{n-1}{0} \\
F(n,1) &= \binom{n-1}{1}\binom{n-2}{0} \\
F(n,2) &= \binom{n-1}{2}\binom{n-3}{0} \\
F(n,3) &= \binom{n-1}{3}\binom{n-4}{0} + \binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1} \\
F(n,4) &= \binom{n-1}{4}\binom{n-5}{0} + \binom{n-1}{1}\binom{n-2}{1} \\
F(n,5) &= \binom{n-1}{5}\binom{n-6}{0} + \binom{n-1}{2}\binom{n-3}{1} \\
F(n,6) &= \binom{n-1}{6}\binom{n-7}{0} + \binom{n-1}{3}\binom{n-4}{1} + \binom{n-1}{0}\binom{n-1}{2} \\
F(n,7) &= \binom{n-1}{7}\binom{n-8}{0} + \binom{n-1}{4}\binom{n-5}{1} + \binom{n-1}{1}\binom{n-2}{2} \\
F(n,8) &= \binom{n-1}{8}\binom{n-9}{0} + \binom{n-1}{5}\binom{n-6}{1} + \binom{n-1}{2}\binom{n-3}{2} \\
F(n,9) &= \binom{n-1}{9}\binom{n-10}{0} + \binom{n-1}{6}\binom{n-7}{1} + \binom{n-1}{3}\binom{n-4}{2} + \binom{n-1}{0}\binom{n-1}{3}
\end{aligned}
$$

従って, 一般項は

$$
F(n,m) = \sum_{i=0}^{[\frac{m}{3}]}\binom{n-1}{m-3i}\binom{n-1-(m-3i)}{i} \tag{5}
$$

と予想できる. なお, $n \leqq m$ の時にいくつかの項が 0 になるため,

$$
F(n,m) = \sum_{i=0}^{[\frac{m}{3}]} {}_{n-1}\mathrm{C}_{m-3i} \cdot {}_{n-1-(m-3i)}\mathrm{C}_{i}
$$

とはできないことに注意.

以下で (5) 式の一般項が正しいことを示す.
まず, (5) 式が (2)〜(4) 式を満たすことを示す.

$$
F(1,0) = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{0}\binom{0}{0} = 1
$$

$m > 0$ のとき,

$$
F(1,m) = \sum_{i=0}^{[\frac{m}{3}]}\binom{0}{m-3i}\binom{-(m-3i)}{i} = 0
$$

$j < 0$ のとき $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} f(i) = 0$ であるから, $m < 0$ に対して

$$
F(n,m) = \sum_{i=0}^{[\frac{m}{3}]}\binom{n-1}{m-3i}\binom{n-1-(m-3i)}{i} = 0
$$

よって, (5) 式は (2)〜(4) 式を満たす.

次に(5)式が(1)式を満たすことを示す.
$m \bmod 3 = 0$ のとき, $\left[\dfrac{m}{3}\right] = \dfrac{m}{3}$, $\left[\dfrac{m-3}{3}\right] = \dfrac{m}{3} - 1$ に注意すると,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= F(n,m) \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{m}{3}} \binom{n-1}{m-3i}\binom{n-1-(m-3i)}{i} \\
&= \binom{n-1}{m} + \sum_{i=1}^{\frac{m}{3}-1} \binom{n-1}{m-3i}\binom{n-1-(m-3i)}{i} + \binom{n-1}{\frac{m}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(n-1,m-3) &= \sum_{i=0}^{\frac{m}{3}-1} \binom{n-2}{m-3(i+1)}\binom{n-2-(m-3(i+1))}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{m}{3}} \binom{n-2}{m-3i}\binom{n-2-(m-3i))}{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{m}{3}-1} \binom{n-2}{m-3i}\binom{n-2-(m-3i))}{i-1} + \binom{n-2}{\frac{m}{3}-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(n-1,m-1) &= \sum_{i=0}^{\frac{m}{3}-1} \binom{n-2}{m-3i-1}\binom{n-1-(m-3i)}{i} \\
&= \binom{n-2}{m-1} + \sum_{i=1}^{\frac{m}{3}-1} \binom{n-2}{m-3i-1}\binom{n-1-(m-3i)}{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(n-1,m) &= \sum_{i=0}^{\frac{m}{3}} \binom{n-2}{m-3i}\binom{n-2-(m-3i)}{i} \\
&= \binom{n-2}{m} + \sum_{i=1}^{\frac{m}{3}-1} \binom{n-2}{m-3i}\binom{n-2-(m-3i)}{i} + \binom{n-2}{\frac{m}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= F(n-1,m-3) + F(n-1,m-1) + F(n-1,m) \\
&= \binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\frac{m}{3}-1} \left[\binom{n-2}{m-3i} \left\{ \binom{n-2-(m-3i)}{i-1} + \binom{n-2-(m-3i)}{i} \right\} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \binom{n-2}{m-3i-1}\binom{n-1-(m-3i)}{i} \right] + \binom{n-2}{\frac{m}{3}-1} + \binom{n-2}{\frac{m}{3}}
\end{aligned}
$$

ここで 2 項係数の関係式 $\dbinom{n}{r} + \dbinom{n}{r+1} = \dbinom{n+1}{r+1}$ より,

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \binom{n-1}{m} + \sum_{i=1}^{\frac{m}{3}-1} \left\{ \binom{n-2}{m-3i}\binom{n-1-(m-3i)}{i} + \binom{n-2}{m-3i-1}\binom{n-1-(m-3i)}{i} \right\} + \binom{n-1}{\frac{m}{3}} \\
&= \binom{n-1}{m} + \sum_{i=1}^{\frac{m}{3}-1} \binom{n-1}{m-3i}\binom{n-1-(m-3i)}{i} + \binom{n-1}{\frac{m}{3}} \\
&= F(n,m)
\end{aligned}
$$

$m \bmod 3 \neq 0$ のとき, $\left[\dfrac{m-3}{3}\right] = \left[\dfrac{m}{3}\right] - 1$, $\left[\dfrac{m-1}{3}\right] = \left[\dfrac{m}{3}\right]$ に注意すると,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= F(n,m) \\
&= \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{3}\right]} \binom{n-1}{m-3i}\binom{n-1-(m-3i)}{i} \\
&= \binom{n-1}{m} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{3}\right]} \binom{n-1}{m-3i}\binom{n-1-(m-3i)}{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(n-1,m-3) &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{3}\right]-1} \binom{n-2}{m-3(i+1)}\binom{n-2-(m-3(i+1))}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{3}\right]} \binom{n-2}{m-3i}\binom{n-2-(m-3i))}{i-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(n-1,m-1) &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{3}\right]} \binom{n-2}{m-3i-1}\binom{n-1-(m-3i)}{i} \\
&= \binom{n-2}{m-1} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{3}\right]} \binom{n-2}{m-3i-1}\binom{n-1-(m-3i)}{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(n-1,m) &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{3}\right]} \binom{n-2}{m-3i}\binom{n-2-(m-3i)}{i} \\
&= \binom{n-2}{m} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{3}\right]} \binom{n-2}{m-3i}\binom{n-2-(m-3i)}{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= F(n-1,m-3) + F(n-1,m-1) + F(n-1,m) \\
&= \binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{3}\right]} \left[\binom{n-2}{m-3i} \left\{ \binom{n-2-(m-3i))}{i-1} + \binom{n-2-(m-3i)}{i} \right\} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \binom{n-2}{m-3i-1}\binom{n-1-(m-3i)}{i} \right] \\
&= \binom{n-1}{m} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{3}\right]} \left\{ \binom{n-2}{m-3i}\binom{n-1-(m-3i)}{i} + \binom{n-2}{m-3i-1}\binom{n-1-(m-3i)}{i} \right\} \\
&= \binom{n-1}{m} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{3}\right]} \binom{n-1}{m-3i}\binom{n-1-(m-3i)}{i} \\
&= F(n,m)
\end{aligned}
$$

よって, (5) 式は (1) 式を満たす.

ゆえに, n チームのリーグ戦で 1 チームの勝ち点合計が m 点になる組み合わせの総数は

$$
\sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{3}\right]} \binom{n-1}{m-3i}\binom{n-1-(m-3i)}{i}
$$

■付録

2 項係数 $\binom{n}{r} = \frac{1}{r!}\prod_{i=0}^{r-1}(n-i)$ の関係式 $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ を示しておく.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} &= \frac{1}{r!}\prod_{i=0}^{r-1}(n-i) + \frac{1}{(r+1)!}\prod_{i=0}^{r}(n-i) \\
&= \frac{r+1}{(r+1)!}\prod_{i=0}^{r-1}(n-i) + \frac{1}{(r+1)!}(n-r)\prod_{i=0}^{r-1}(n-i) \\
&= \frac{1}{(r+1)!}\big((r+1)+(n-r)\big)\prod_{i=0}^{r-1}(n-i) \\
&= \frac{1}{(r+1)!}(n+1)\prod_{i=1}^{r}(n+1-i) \\
&= \frac{1}{(r+1)!}\prod_{i=0}^{r}(n+1-i) \\
&= \binom{n+1}{r+1}
\end{aligned}
$$