問 1

(1)

n	1	2	3	4	5	6
a_n	2	4	7	11	16	22

(2)

n 本の直線によって平面が a_n 個の領域に分かれているとき, $n+1$ 本目の直線を引くと n 本の直線と交わる.
よって, $n+1$ 本目の直線によって 2 つに分割される領域が $n+1$ 個あり, 領域は $n+1$ 個増える.
従って,

$$a_{n+1} = a_n + n + 1$$

この階差数列の一般項を求めると,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \\ &= 2 + \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 \\ &= \frac{n^2 - n}{2} + \frac{2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2}{2} \end{aligned}$$

問 2

(1)

n	1	2	3	4	5	6
b_n	1	2	4	8	16	31

(2)

円周上の n 個点を順に $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n$ とする.
P_1 と P_n の間に $n+1$ 個目の点 P_{n+1} を取り,
P_{n+1} と P_k $(1 \leqq k \leqq n)$ を結んだときに領域がいくつ増えるかを考える.
直線 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_k$ の両側にはそれぞれ $k-1$ 個, $n-k$ 個の点があり,
そのすべての組み合わせが結ばれているので, 直線 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_k$ は $(k-1)(n-k)$ 本の直線と交わる.
従って, 直線 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_k$ によって領域が $(k-1)(n-k)+1 = -k^2+(n+1)k-(n-1)$ 個増える.
$k = 1, 2, \cdots, n$ の n 本の直線によって増える領域の数は,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left\{-k^2+(n+1)k-(n-1)\right\} &= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)^2}{2}-n(n-1)\\ &= \frac{n^3-3n^2+8n}{6}\end{aligned}$$

よって,

$$b_{n+1} = b_n + \frac{n^3-3n^2+8n}{6}$$

この階差数列の一般項を求めると,

$$\begin{aligned}b_n &= b_1 + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\left(k^3-3k^2+8k\right)\\ &= 1+\frac{1}{6}\left\{\frac{(n-1)^2n^2}{4}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{2}+4(n-1)n\right\}\\ &= \frac{n(n-1)(n^2-5n+18)}{24}+1\\ &= \frac{n^4-6n^3+23n^2-18n+24}{24}\end{aligned}$$

おまけ

b_n がもっと簡単に書けないか変形してみた.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{n(n-1)(n^2-5n+18)}{24}+1 \\
&= \frac{n(n-1)\left\{(n-2)(n-3)+12\right\}}{24}+1 \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)}{2}+1 \\
&= \binom{n}{4}+\binom{n}{2}+\binom{n}{0} \\
&= \binom{n-1}{4}+\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{0}
\end{aligned}$$

a_n の場合は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^2+n+2}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+1 \\
&= \binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{0} \\
&= \binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}
\end{aligned}$$

a_n と b_n がこのように変形できることの数学的意味は見いだせていないが, 以下の予想ができる.

a_n の拡張に関する予想

3 次元空間に n 枚の平面があり, どの 2 枚も平行でなく, どの 4 枚も 1 点で交わらず, どの 2 枚の交線も平行ではないとき, これらの n 枚の平面によって空間が $a(3,n)$ 個の領域に分けられたとすると,

$$a(3,n)=\binom{n}{3}+\binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}$$

と予想できる. また一般に m 次元の場合は,

$$a(m,n)=\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{m}$$

と予想できる. $m=1$ の場合は,

$$\begin{aligned}
a(1,n) &= \binom{n}{1}+\binom{n}{0} \\
&= n+1
\end{aligned}$$

となって正しい.
$m=3$ の場合, $n=4$ までは正しいことを確認したが, $n \geqq 5$ については調べていない.
$m \geqq 4$ については調べていない.