第 113 回応募問題解答

辺 BC 上に $\angle \mathrm{BAE} = 90^\circ$ となるような点 E をとり, さらに辺 AC 上に $\angle \mathrm{AEF} = 90^\circ$ となるような点 F をとる．すると, AB//FE となるから, $\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{FEC}$ である．また,

$$\angle \mathrm{EAC} = \angle \mathrm{BAC} - \angle \mathrm{BAE} = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

であるから, $\triangle \mathrm{AEF}$ は直角二等辺三角形となり, AE = EF である． ここで, $\mathrm{AD} = h$, $\mathrm{AB} = x$, $\mathrm{AE} = \mathrm{EF} = y$, $\mathrm{BE} = z$ とおく．
$\triangle \mathrm{ABD}$ と $\triangle \mathrm{DBA}$ は鋭角の 1 つを共有した直角三角形なので, $\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{DBA}$ となり,

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AE} = \mathrm{DB} : \mathrm{DA}$$

$$x : y = 4 : h \tag{1}$$

$$y = \frac{xh}{4} \tag{2}$$

初めに述べた $\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{FEC}$ より,

$$\mathrm{AB} : \mathrm{FE} = \mathrm{BC} : \mathrm{EC}$$

$$\mathrm{AB} : \mathrm{FE} = \mathrm{BC} : 10 - \mathrm{BE}$$

$$x : y = 10 : 10 - z \tag{3}$$

(1), (3) 式より,

$$4 : h = 10 : 10 - z$$

$$10h = 4(10 - z)$$

$$z = 10 - \frac{10}{4}h \tag{4}$$

さて, $\triangle \mathrm{ABE}$ について, 辺 AB を底辺としたときの面積と辺 BE を底辺としたときの面積が等しいから,

$$\frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AE}}{2} = \frac{\mathrm{BE} \times \mathrm{AD}}{2}$$

$$xy = zh$$

これに (2), (4) 式を代入すると,

$$\frac{x^2 h}{4} = \left(10 - \frac{10}{4}h\right) h$$

$$x^2 = 40 - 10h$$

さらに, $\triangle \mathrm{ABD}$ について三平方の定理より,

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2$$

$$x^2 = h^2 + 16$$

であるから, これを代入すると,

$$h^2 + 16 = 40 - 10h$$

$$h^2 + 10h - 24 = 0$$

$$(h - 2)(h + 12) = 0$$

$h > 0$ なので, $h = 2$
ゆえに $\triangle \mathrm{ABC}$ の面積は $\dfrac{10 \times 2}{2} = 10$