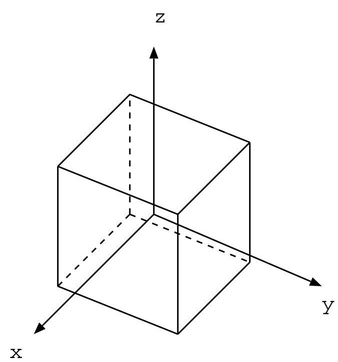
重心のずれたサイコロの目の出る確率の計算法

幾何計算駆け込み寺住職

杉原　厚吉

図に示すように，(x, y, z) 直交座標系の原点にサイコロの中心を一致させ，x 軸，y 軸，z 軸の正方向に，目 1, 2, 3 の面の向きを合わせるものとする．このサイコロの一辺の長さを $2d$ とする．このとき，八つの頂点の座標は $(\pm d, \pm d, \pm d)$ となる．ただし $\pm$ は，$+$ または $-$ を表し，三つの座標成分の $+$ と $-$ はすべての組み合わせをとるものとする．



図．中心を原点に一致させたサイコロ

今，サイコロの重心 G は，中心 $(0, 0, 0)$ とは異なり，座標 (g_x, g_y, g_z) にあるとしよう．このとき，目的は，サイコロのそれぞれの面を重心 G から見たときの立体角を求めることである．この立体角は，G を中心とする半径 1 の球の表面 S へ，それぞれの面を中心投影したときの像の面積である．

G とは異なる任意の点 P の球面 S への中心投影像 (これは G から P の方向へのばした半直線と S との交点である) を $\overline{\mathrm{P}}$ で表すことにする．

サイコロの一つの面の 4 頂点を順に $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ としよう．辺 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の球面 S への中心投影像は，G と $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を通る平面と S との交線の一部だから，大円弧である．他の辺の像も同様に大円弧となる．したがって，この面の立体角は，球面上の 4 点 $\overline{\mathrm{P}_1}, \overline{\mathrm{P}_2}, \overline{\mathrm{P}_3}, \overline{\mathrm{P}_4}$ を順に大円弧でつないでできる球面四角形の面積である．

この面積は，球面四角形に対角線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3$ を入れて二つの球面三角形 $\overline{\mathrm{P}_1}\,\overline{\mathrm{P}_2}\,\overline{\mathrm{P}_3}$，$\overline{\mathrm{P}_1}\,\overline{\mathrm{P}_3}\,\overline{\mathrm{P}_4}$ に分け，それぞれの面積の和をとることによって求められる．そこで，次に球面三角形 $\overline{\mathrm{P}_1}\,\overline{\mathrm{P}_2}\,\overline{\mathrm{P}_3}$ の面積を求める方法を考える．

3 点 $\overline{\mathrm{P}_1}, \overline{\mathrm{P}_2}, \overline{\mathrm{P}_3}$ における球面三角形の内角の大きさを，それぞれ A, B, C と名づける．このとき，球面三角形 $\overline{\mathrm{P}_1}\,\overline{\mathrm{P}_2}\,\overline{\mathrm{P}_3}$ の面積は

$$A + B + C - \pi \tag{1}$$

となる [1].

また，$\overline{\mathrm{P_1}}$ の対辺 $\overline{\mathrm{P_2}}\,\overline{\mathrm{P_3}}$ の辺の長さを a とする．同様に，$\overline{\mathrm{P_2}}$ の対辺 $\overline{\mathrm{P_3}}\,\overline{\mathrm{P_1}}$ および $\overline{\mathrm{P_3}}$ の対辺 $\overline{\mathrm{P_1}}\,\overline{\mathrm{P_2}}$ の長さを，それぞれ b, c とする．a, b, c は，それぞれ中心 G から対応する辺を臨む角度でもある．

さて，球面三角形に関しては,

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \tag{2}$$
$$\cos B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}, \tag{3}$$
$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \tag{4}$$

が成り立つことがわかっている [1].

今，サイコロの重心 G を始点とし頂点を終点とするベクトル $\overrightarrow{\mathrm{GP_1}}, \overrightarrow{\mathrm{GP_2}}, \overrightarrow{\mathrm{GP_3}}$ がわかっている．これを単位長へ変換したものが $\overrightarrow{\overline{\mathrm{GP_1}}}, \overrightarrow{\overline{\mathrm{GP_2}}}, \overrightarrow{\overline{\mathrm{GP_3}}}$ であるから，これによって $\overline{\mathrm{P_1}}, \overline{\mathrm{P_2}}, \overline{\mathrm{P_3}}$ を求めることができる．次に,

$$\cos a = \overrightarrow{\overline{\mathrm{GP_2}}} \cdot \overrightarrow{\overline{\mathrm{GP_3}}}, \quad \cos b = \overrightarrow{\overline{\mathrm{GP_3}}} \cdot \overrightarrow{\overline{\mathrm{GP_1}}}, \quad \cos c = \overrightarrow{\overline{\mathrm{GP_1}}} \cdot \overrightarrow{\overline{\mathrm{GP_2}}}$$

によって a, b, c を求め，これを式 (2), (3), (4) に代入することによって，内角 A, B, C を求めることができる．ただし，$\cdot$ はベクトルの内積を表す．最後にこれらを式 (1) へ代入すれば，球面三角形 $\overline{\mathrm{P_1}}\,\overline{\mathrm{P_2}}\,\overline{\mathrm{P_3}}$ の面積が得られる．同様にして他の球面三角形の面積も求まり，したがって，サイコロの各面を臨む立体角も求まる．

一辺の長さが 8 ミリのサイコロの重心が，目 1 と目 6 の方向には目 6 の方へ 0.005 ミリずれ，目 2 と目 5 の方向には目 2 の方へ 0.011 ミリずれ，目 3 と目 4 の方向には目 3 の方へ 0.002 ミリずれているとする．このとき，$\mathrm{G} = (-0.005, 0.011, 0.002)$ である．このサイコロに対して，上の計算で各面の立体角を求め，その比をそれぞれの面が下になる確率であるとみなすと，各目の出る確率は次の表のようになる．

表 1. サイコロの目の出る確率

目	1	2	3	4	5	6
確率	0.1664	0.1672	0.1667	0.1666	0.1661	0.1669

参考文献

[1] 森口，宇田川，一松: 「数学公式 」，岩波書店，1957.